получить точное решение (28). Приведем для иллюстрации этого алгоритма (табл. 2) значения прогоночных коэффициентов α_i, β_i и γ_i, а также θ_i, $\varkappa_i$ и γ_i для $N=10$.

Таблица 2

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
α_i		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	
β_i		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1		
γ_i		1	1	-1	-2	-2	2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	-2	1
θ_i		2	3	4	0	5	6	7	9	8	1	
$\varkappa_i$		1	0	1	1	1	1	1	8	1	10	
η_i		0	1	0	5	6	7	8	1	10		
y_i	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	

Из таблицы видно, что неизвестные y_i определяются в следующем порядке: y_{10}, y_1, y_8, y_9, y_7, y_6, y_5, y_0, y_4, y_3, y_2, т. е. в немонотонном порядке.

§ 4. Метод матричной прогонки

1. Системы векторных уравнений. Выше было отмечено, что одним из способов решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка является сведение к системе уравнений первого порядка с последующей аппроксимацией этой системы разностной схемой. В результате мы получим *двухточечную векторную систему* уравнений с краевыми условиями первого рода. В общем виде она записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &P_{i+1}\boldsymbol{V}_{i+1}-Q_i\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{F}_{i+1}, \qquad 0\leqslant i\leqslant N-1,\\ &P_0\boldsymbol{V}_0=\boldsymbol{F}_0, \quad Q_N\boldsymbol{V}_N=\boldsymbol{F}_{N+1}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{V}_i$ — вектор неизвестных размерности M, P_{i+1} и Q_i для $0\leqslant i\leqslant N-1$ — квадратные матрицы $M\times M$, P_0 и Q_N — прямоугольные матрицы соответственно размеров $M_1\times M$ и $M_2\times M$, $M_1+M_2=M$. Вектор $\boldsymbol{F}_{i+1}$ для $0\leqslant i\leqslant N-1$ имеет размерность M, а векторы $\boldsymbol{F}_0$ и $\boldsymbol{F}_{N+1}$ — M_1 и M_2 соответственно.

Заметим, что другим способом решения указанных дифференциальных уравнений является непосредственная аппроксимация этих уравнений разностными схемами. При этом мы получим систему многоточечных скалярных уравнений. Методы решения трех- и пятиточечных скалярных уравнений были изучены нами в § 1—3. Если же аппроксимируется система обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка, то возникает система многоточечных векторных уравнений. Однако как скалярные, так и векторные системы многоточечных уравнений могут быть сведены к системам вида (1). При этом любому методу решения (1) будет соответствовать некоторый метод решения исходной многоточечной системы. Идею указанного преобразования поясним на примере системы пятиточечных уравнений, рассмотренной в § 3 (см. (1)—(5)). Если обозначить

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{Y}_i=(y_{i+1},\ y_i,\ y_{i-1},\ y_{i-2}), && 2\leqslant i\leqslant N-1,\\
&\boldsymbol{F}_{i+1}=(f_i,\ 0,\ 0,\ 0), && 2\leqslant i\leqslant N-2,\\
&\boldsymbol{F}_2=(f_0,\ f_1),\quad \boldsymbol{F}_N=(f_{N-1},\ f_N), &&
\end{aligned}
$$

то с учетом тождественных соотношений между Y_{i+1} и Y_i указанная система из § 3 запишется в виде

$$
\begin{aligned}
&P_{i+1}\boldsymbol{Y}_{i+1}-Q_i\boldsymbol{Y}_i=\boldsymbol{F}_{i+1}, \qquad 2\leqslant i\leqslant N-2,\\
&P_2\boldsymbol{Y}_2=\boldsymbol{F}_2,\quad Q_{N-1}\boldsymbol{Y}_{N-1}=\boldsymbol{F}_N,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где

$$
P_{i+1}=\begin{Vmatrix} e_i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix},\quad
Q_i=\begin{Vmatrix} d_i & -c_i & b_i & -a_i\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{Vmatrix},\quad 2\leqslant i\leqslant N-2,
$$

$$
P_2=\begin{Vmatrix} 0 & e_0 & -d_0 & c_0\\ e_1 & -d_1 & c_1 & -b_1\end{Vmatrix},\quad
Q_{N-1}=\begin{Vmatrix} -d_{N-1} & c_{N-1} & -b_{N-1} & a_{N-1}\\ c_N & -b_N & a_N & 0\end{Vmatrix}.
$$

В данном случае $M_1=M_2=2$, $M=4$.

Несмотря на то, что многоточечные векторные уравнения можно свести к виду (1) и ограничиться построением метода решения только системы (1), мы рассмотрим отдельно класс *трехточечных векторных уравнений*. Более того, в п. 3 мы сведем (1) к системе трехточечных векторных уравнений и получим метод решения системы (1) как вариант метода решения трехточечных уравнений.

Прежде чем описывать общий вид трехточечных уравнений, рассмотрим пример. Мы покажем, как разностная задача для простейшего эллиптического уравнения сводится к системе трехточечных уравнений специального вида.

Пусть на прямоугольной сетке $\bar\omega=\{x_{ij}=(ih_1,\ jh_2)\in\bar G,\ 0\leqslant i\leqslant M,\ 0\leqslant j\leqslant N,\ l_1=Mh_1,\ l_2=Nh_2\}$ с границей γ, введенной в прямоугольнике $\bar G=\{0\leqslant x_\alpha\leqslant l_\alpha,\ \alpha=1,\ 2\}$, требуется найти решение *разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона*

$$
\begin{aligned}
&y_{\bar x_1 x_1}+y_{\bar x_2 x_2}=-\varphi(x), && x\in\omega,\\
&y(x)=g(x), && x\in\gamma,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где

$$
y_{\bar x_1 x_1}=\frac{1}{h_1^2}[y(i+1,j)-2y(i,j)+y(i-1,j)],
$$

$$
y_{\bar x_2 x_2}=\frac{1}{h_2^2}[y(i,j+1)-2y(i,j)+y(i,j-1)],\quad y(i,j)=y(x_{ij}).
$$

Преобразуем схему (3). Для этого умножим (3) на $(-h_2^2)$ и распишем по точкам разностную производную $y_{\bar{x}_2 x_2}$. При $1 \leqslant j \leqslant N-1$ будем иметь:

для $2 \leqslant i \leqslant M-2$

$$-y(i,\ j-1)+[2y(i,\ j)-h_2^2 y_{\bar{x}_1 x_1}(i,\ j)]-y(i,\ j+1)=h_2^2\varphi(i,\ j);$$

для $i=1$

$$-y(i,j-1)+\left[2y(i,j)-\frac{h_2^2}{h_1^2}(y(i+1,j)-2y(i,j))\right]-y(i,j+1)= = h_2^2\bar{\varphi}(i,\ j);$$

для $i=M-1$

$$-y(i,j-1)+\left[2y(i,j)-\frac{h_2^2}{h_1^2}(y(i-1,j)-2y(i,j))\right]-y(i,j+1)= = h_2^2\bar{\varphi}(i,\ j),$$

где

$$\bar{\varphi}(1,\ j)=\varphi(1,\ j)+\frac{1}{h_1^2}g(0,j),$$

$$\bar{\varphi}(M-1,\ j)=\varphi(M-1,\ j)+\frac{1}{h_1^2}g(M,\ j).$$

Кроме того, для $j=0,\ N$ имеем

$$y(i,0)=g(i,0),\quad y(i,N)=g(i,N),\qquad 1 \leqslant i \leqslant M-1.$$

Обозначим теперь через Y_j вектор размерности $M-1$, компонентами которого являются значения сеточной функции $y(i,\ j)$ во внутренних узлах сетки $\bar{\omega}$ на j-й строке:

$$Y_j=(y(1,\ j),\ y(2,\ j),\ \ldots,\ y(M-1,\ j)),\qquad 0 \leqslant j \leqslant N,$$

а через F_j — вектор размерности $M-1$

$$F_j=(h_2^2\bar{\varphi}(1,\ j),\ h_2^2\varphi(2,\ j),\ \ldots,\ h_2^2\varphi(M-2,\ j),\ h_2^2\bar{\varphi}(M-1,\ j)),$$
$$1 \leqslant j \leqslant N-1,$$
$$F_j=(g(1,\ j),\ g(2,\ j),\ \ldots,\ g(M-1,\ j)),\qquad j=0,\ N.$$

Определим также квадратную матрицу C размером $(M-1)\times\times(M-1)$ следующим образом:

$$CV=(\Lambda v(1),\ \Lambda v(2),\ \ldots,\ \Lambda v(M-1)),$$
$$V=(v(1),\ v(2),\ \ldots,\ v(M-1)),$$

где разностный оператор Λ есть

$$\Lambda v(i)=2v(i)-h_2^2 v_{\bar{x}_1 x_1}(i),\qquad 1 \leqslant i \leqslant M-1,$$
$$v(0)=v(M)=0.$$

Легко видеть, что C есть трехдиагональная матрица вида

$$C=\left\|\begin{array}{ccccccc} 2(1+\alpha) & -\alpha & 0 \;\ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 2(1+\alpha) & -\alpha \;\ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 2(1+\alpha) \;\ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \;\ldots\ldots & 2(1+\alpha) & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \;\ldots\ldots & -\alpha & 2(1+\alpha) & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \;\ldots\ldots & 0 & -\alpha & 2(1+\alpha) \end{array}\right\|, \qquad (4)$$

где $\alpha=h_2^2/h_1^2$, причем C является матрицей с диагональным преобладанием, так как $|1+\alpha|>|\alpha|$, $\alpha>0$, и следовательно, не вырождена.

Используя введенные обозначения, полученные выше соотношения можно записать в виде следующей системы трехточечных векторных уравнений:

$$\begin{gathered} -\boldsymbol{Y}_{j-1}+C\boldsymbol{Y}_j-\boldsymbol{Y}_{j+1}=\boldsymbol{F}_j, \qquad 1\leqslant j\leqslant N-1, \\ \boldsymbol{Y}_0=\boldsymbol{F}_0, \quad \boldsymbol{Y}_N=\boldsymbol{F}_N. \end{gathered} \qquad (5)$$

Это и есть искомая трехточечная система специального вида с постоянными коэффициентами.

Задача (5) является частным случаем следующей общей задачи: найти векторы $\boldsymbol{Y}_j$ $(0\leqslant j\leqslant N)$, удовлетворяющие следующей системе:

$$\begin{aligned} & C_0\boldsymbol{Y}_0-B_0\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{F}_0, && j=0, \\ & -A_j\boldsymbol{Y}_{j-1}+C_j\boldsymbol{Y}_j-B_j\boldsymbol{Y}_{j+1}=\boldsymbol{F}_j, && 1\leqslant j\leqslant N-1, \\ & -A_N\boldsymbol{Y}_{N-1}+C_N\boldsymbol{Y}_N=\boldsymbol{F}_N, && j=N, \end{aligned} \qquad (6)$$

где $\boldsymbol{Y}_j$ и $\boldsymbol{F}_j$ — векторы размерности M_j, C_j — квадратная матрица $M_j\times M_j$, A_j и B_j — прямоугольные матрицы соответственно размеров $M_j\times M_{j-1}$ и $M_j\times M_{j+1}$.

К системам вида (6) сводятся разностные схемы для эллиптических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в произвольной области любого числа измерений. В двумерном случае, как и в разобранном выше примере, вектор $\boldsymbol{Y}_j$ образуют неизвестные на j-ой строке сетки $\bar{\omega}$, а в случае трех измерений — неизвестные на j-м слое сетки $\bar{\omega}$. В последнем случае C_j — блочно-трехдиагональные матрицы с трехдиагональными матрицами на главной диагонали.

Для решения системы (6) мы рассмотрим *метод матричной прогонки*, который аналогичен методу прогонки для скалярных трехточечных уравнений.

2. Прогонка для трехточечных векторных уравнений. Построим метод решения системы трехточечных векторных уравнений (6). Эта система родственна системе скалярных трехточечных уравнений, метод решения которой был изучен нами в § 1. Поэтому решение задачи (6) будем искать в виде

$$\boldsymbol{Y}_j=\alpha_{j+1}\boldsymbol{Y}_{j+1}+\beta_{j+1}, \qquad j=N-1,\ N-2,\ \ldots,\ 0, \qquad (7)$$